



# ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

## Робоча програма навчальної дисципліни «Функціональний аналіз» (Силабус)

### 1) Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Перший (бакалаврський)</i>
Галузь знань	<i>11 Математика та статистика</i>
Спеціальність	<i>111 Математика</i>
Освітня програма	<i>Страхова та фінансова математика</i>
Статус дисципліни	<i>Нормативна</i>
Форма навчання	<i>Очна (денна)/дистанційна</i>
Рік підготовки, семестр	<i>3 курс, осінній семестр</i>
Обсяг дисципліни	<i>6 кредитів, 180 годин (54 години – Лекції, 54 години – Практичні, 72 години – СРС)</i>
Семестровий контроль/ контрольні заходи	<i>Екзамен / модульна контрольна робота, розрахункова робота</i>
Розклад занять	<a href="http://rozklad.kpi.ua/Schedules/ScheduleGroupSelection.aspx">http://rozklad.kpi.ua/Schedules/ScheduleGroupSelection.aspx</a>
Мова викладання	<i>Українська</i>
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: <i>доцент кафедри МА та ТЙ, кандидат фізико-математичних наук Маслюк Ганна Олексіївна, e-mail: <a href="mailto:masliukgo@ukr.net">masliukgo@ukr.net</a></i> Практичні / Семінарські: <ul style="list-style-type: none"><li><i>доцент кафедри МА та ТЙ, кандидат фізико-математичних наук Маслюк Ганна Олексіївна, e-mail: <a href="mailto:masliukgo@ukr.net">masliukgo@ukr.net</a></i></li><li><i>асистент кафедри МА та ТЙ, доктор філософії (PhD) у галузі знань Математика та статистика Скоробогач Тетяна Богданівна, e-mail: <a href="mailto:tetianaskorobohach@gmail.com">tetianaskorobohach@gmail.com</a></i></li></ul>
Розміщення курсу	Посилання на дистанційний ресурс (Moodle, Google Classroom) <a href="https://campus.kpi.ua">https://campus.kpi.ua</a>

### 2) Програма навчальної дисципліни

#### 1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

<b>Мета дисципліни</b>	Метою навчальної дисципліни є ознайомлення майбутніх фахівців-математиків з основними поняттями та результатами функціонального аналізу та методами розв'язання задач, що виникають в цій дисципліні та її численних застосуваннях до математичної фізики, теорії інтегральних рівнянь, теорії узагальнених функцій.
<b>Предмет навчальної дисципліни</b>	Основні поняття і твердження функціонального аналізу, теорії метричних просторів, теорії нормованих і гільбертових просторів, теорії лінійних неперервних функціоналів.
<b>Компетентності</b>	Здатність навчатися, здобувати нові знання, уміння, у тому числі в галузях, відмінних від математики (ЗК1); Здатність вирішувати проблеми у професійній діяльності на основі абстрактного мислення, аналізу та прогнозу (ЗК3); Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями (ЗК7);

	<p>Здатність спілкуватися державною мовою і усно, і письмово (ЗК8);</p> <p>Здатність приймати обґрунтовані рішення (ЗК9);</p> <p>Здатність працювати автономно (ЗК12);</p> <p>Здатність проявляти творчий підхід та ініціативу (ЗК16);</p> <p>Здатність формувати проблеми математично та в символічній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання (ФК1);</p> <p>Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок (ФК3);</p> <p>Спроможність розуміти наукові проблеми та виділяти їхні суттєві риси (ФК4);</p> <p>Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів (ФК8).</p>
<p><b>Програмні результати навчання</b></p>	<p>Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми (РН4);</p> <p>Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями (РН10);</p> <p>Усно й письмово спілкуватися рідною та іноземною мовами в науковій, виробничій та соціально-суспільній сферах діяльності із професійних питань; читати спеціальну літературу; знаходити, аналізувати та використовувати інформацію з різних довідкових джерел (РН11);</p> <p>Відшуковувати потрібну науково-технічну інформацію у науковій літературі, базах даних та інших джерелах інформації (РН12);</p> <p>Знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем (РН16).</p>

## 2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

**Пререквізити:** Дисципліна «Функціональний аналіз» викладається в першому семестрі третього курсу підготовки бакалаврів за освітньою програмою «Страхова та фінансова математика». У структурно-логічній схемі освітньої програми підготовки за даною спеціальністю їй передують дисципліни «Математичний аналіз: функції однієї змінної», «Математичний аналіз: функції кількох змінних».

**Постреквізити:** Дисципліна «Функціональний аналіз» передує освітнім компонентам «Методи математичної фізики» і вивченню вибіркової дисципліни «Теорія операторів та інтегральні рівняння».

## 3. Зміст навчальної дисципліни

### Розділ 1. Метричні простори і їх відображення.

Тема 1.1. Метричні простори.

Тема 1.2. Відображення метричних просторів.

### Розділ 2. Лінійні нормовані і гільбертові простори.

Тема 2.1. Лінійні нормовані простори.

Тема 2.2. Гільбертові простори.

### **Розділ 3. Лінійні функціонали і спряжений простір.**

Тема 3.1. Неперервні лінійні функціонали.

Тема 3.2. Спряжений простір.

Тема 3.3. Слабка збіжність векторів і функціоналів.

#### **4. Навчальні матеріали та ресурси**

##### **Базова література**

1. Березанський Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель В. Г. Функціональний аналіз. – Львів, Видавець І. Є. Чижиков, 2014. – 560 с.

2. Анікушин А.В., Семенов В.В. Збірник задач з функціонального аналізу. – К.: Видавничополіграфічний центр "Київський університет", 2017. – 64 с.

##### **Допоміжна література**

3. Сторож О. Г. Задачі з теорії міри та функціонального аналізу: Збірник задач. – Львів, Видавець І. Є. Чижиков, 2011. – 152 с.

4. Гарасим Я.С., Недашковська А.М., Остудін Б.А. Методи розв'язування типових задач функціонального аналізу: Методичний посібник для студентів. – Львів: Простір М, 2015. – 72 с.

5. Дороговцев А.Я. Математический анализ. – К.: Факт, 2004 – 560 с.

6. Городній М.Ф., Константінов О.Ю., Нестеренко О.Н., Чайковський А.В. Навчальні завдання до практичних занять з функціонального аналізу. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2006. – 103 с.

7. Kadets V. A Course in Functional Analysis and Measure Theory. – Springer, 2018. – 553 p.

8. Навчальні завдання до практичних занять з функціонального аналізу / Укладачі О. Ю. Константінов, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський. Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2014. – 41 с.

### **3) Навчальний контент**

#### **9. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)**

##### **Очна/дистанційна форма**

**Рекомендовані методи навчання:** вивчення базової та допоміжної літератури за тематикою лекцій, розв'язування задач на практичних заняттях. Важливим аспектом якісного засвоєння матеріалу, відпрацювання методів та алгоритмів розв'язання основних завдань дисципліни є самостійна робота (опрацювання навчальних матеріалів лекційних занять, підготовка до практичних занять, виконання завдань РГР, підготовка до МКР та екзамену).

##### **Лекційні заняття**

###### **Лекції 1-2. Метричні простори.**

Означення метрики і метричного простору. Приклади метричних просторів. Декартів добуток метричних просторів. Границя послідовності елементів метричного простору. Кулі, обмежені множини, гранична точка.

###### **Лекції 3-4. Повнота і сепарабельність.**

Відкриті множини. Структура відкритих множин на прямій і в просторі. Замкнені множини. Сепарабельні метричні простори. Повні метричні простори. Поповнення метричного простору.

###### **Лекції 5-6. Функції на метричних просторах.**

Границя функції в точці. Неперервні функції. Теорема про характеристизацію неперервної функції. Рівномірно неперервна на множині функція.

###### **Лекції 7-9. Компактні множини.**

Означення компактної множини. Властивості компактних множин. Критерій компактності. Компактні множини в  $(R^n, \rho)$ . Компактні множини в  $(C[a, b], \rho)$ .

**Лекції 10-12. Принцип стискаючих відображень.**

Властивості неперервних функцій на компактах. Означення стискаючого відображення. Теорема Банаха про стискаючі відображення. Застосування принципу стискаючих відображень. Теорема про існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння. Теорема про неявну функцію.

**Лекція 13. Теорема Стоуна-Вейєрштрасса та її застосування.**

**Лекції 14-16. Лінійні нормовані і гільбертові простори.**

Лінійні нормовані і банахові простори. Передгільбертові та гільбертові простори. Квазіскалярний добуток і напівнорми. Приклади банахових і гільбертових просторів. Простори сумовних функцій. Простори  $l_p$ .

**Лекції 17-18. Лінійні неперервні функціонали.**

Теорема про майже ортогональний вектор. Скінченновимірні простори. Означення та властивості лінійного неперервного функціоналу. Продовження за неперервністю. Теорема Гана-Банаха.

**Лекції 19-20. Спряжений простір.**

Базис Шаудера. Лінійні неперервні функціонали в конкретних просторах функцій і послідовностей.

**Лекція 21. Вкладення лінійного нормованого простору у другий спряжений простір.**

Другий спряжений простір. Рефлексивні простори.

**Лекції 22-23. Слабка збіжність лінійних неперервних функціоналів.**

Теорема Банаха-Штейнгауза. Критерій слабкої збіжності. Теореми Геллі. Критерій слабкої збіжності в лінійному нормованому просторі.

**Лекції 24-25. Ортогональність.**

Ортогональність. Проекція вектора на підпростір. Ортогональні суми підпросторів. Теорема Ріса.

**Лекція 26-27. Ортонормовані базиси в гільбертових просторах.**

Ортонормовані системи векторів. Нерівність Бесселя. Рівність Парсеваля.

**Практичні заняття**

**Практичні заняття 1-3. Метричні простори.**

**Практичні заняття 4-5. Збіжність в метричних просторах.**

**Практичне заняття 6. Відкриті та замкнені множини.**

**Практичне заняття 7. Сепарабельні і несепарабельні метричні простори.**

**Практичні заняття 8. Повні і неповні метричні простори.**

**Практичне заняття 9. Компактні множини.**

**Практичне заняття 10-12. Принцип стискаючих відображень.**

**Практичне заняття 13. МКР-1.**

**Практичне заняття 14-17. Лінійні нормовані і банахові простори.**

**Практичне заняття 18. Скалярний добуток. Гільбертові простори.**

**Практичне заняття 19-20. Лінійні неперервні функціонали.**

**Практичне заняття 21-22. Норма функціоналу.**

**Практичні заняття 23-24. Норми лінійних функціоналів в конкретних просторах.**

**Практичні заняття 25. Слабка збіжність векторів і функціоналів.**

**Практичні заняття 26-27. Захист виконаних РГР-1 та РГР-2. — МКР-2.**

## 10. Самостійна робота студента/аспіранта

Вивчення дисципліни включає наступні види самостійної роботи:

- підготовка до лекційних та практичних занять;
- виконання розрахункової роботи;
- підготовка та виконання модульної контрольної роботи;
- підготовка до екзамену.

### 4) Політика та контроль

## 11. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

**Рекомендовані методи навчання:** вивчення основної та допоміжної літератури за тематикою лекцій, розв'язування задач на практичних заняттях. Рекомендується вести докладний конспект лекцій. Важливим аспектом якісного засвоєння матеріалу, відпрацювання методів та алгоритмів вирішення основних завдань дисципліни є самостійна робота: опрацювання навчальної літератури, підготовка до лекційних та практичних занять, виконання розрахункової роботи, підготовка до МКР та екзамену.

### Академічна доброчесність

Політика та принципи академічної доброчесності визначені у розділі 3 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

### Норми етичної поведінки

Норми етичної поведінки студентів і працівників визначені у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

## 12. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO) (очна/дистанційна форма)

Розподіл навчального часу за видами занять і завдань з дисципліни згідно з робочим навчальним планом.

Семестр	Навчальний час		Розподіл навчальних годин				Контрольні заходи		
	кредити	акад. год.	Лекц.	Практич.	Лаб. роб.	СРС + Екз.	МКР	РГР	Семестрова атестація
5	6	108	54	54	-	72	1	1	екзамен

Рейтинг студента з дисципліни складається з балів за:

- 1) розрахункова робота (РГР може бути поділена на частини);
- 2) модульна контрольна роботу (МКР може бути поділена на частини);
- 3) відповіді на практичних заняттях;
- 4) відповіді на екзамені.

**Розмір шкали рейтингу  $R = 100$  балів.**

**Розмір стартової шкали  $R_C = 50$  балів.**

**Розмір екзаменаційної шкали  $R_E = 50$  балів.**

### Система рейтингових (вагових) балів та критерії оцінювання

#### 1. Розрахункова робота (РГР)

Максимальна кількість балів: **20 балів** = 15 балів + 5 балів (захист виконаних РГР-1+РГР-2 проводиться у формі усного опитування, після виконання двох частин РГР).

**(РГР\_Частина\_1 – max: 7 балів; РГР\_Частина\_2 – max: 8 балів).**

Критерії оцінювання РГР:

- невиконання РГР – 0 балів.
- оцінка РГР (у балах) дорівнює величині відсотка (від максимальної кількості балів).
- **за несвоєчасне (пізніше ніж на тиждень) подання РГР зараховується не більше 60% (кожен день, після встановленого терміну здачі, це -0,86 штрафних балів від вагового балу за частину РГР).**

## 2. Модульна контрольна робота (МКР)

Максимальна кількість балів: **20 балів**.

**(МКР-1 – max: 10 балів; МКР-2 – max: 10 балів).**

Критерії оцінювання МКР:

- відсутність на контрольній роботі – 0 балів,
- оцінка МКР (в балах) дорівнює величині відсотка (від максимальної кількості балів) її виконання.

## 3. Відповіді на практичних заняттях

Максимальна кількість балів за відповіді під час практичних занять за семестр: **10 балів**.

**Відповідь на практичному занятті оцінюється max: 1 бал.**

- **0.0** – відмова від відповіді, незнання необхідного теоретичного матеріалу;
- **0.25** – знання окремих фрагментів теоретичного матеріалу, вміння деякі з них застосовувати;
- **0.5** – поверхнєве знання теоретичного матеріалу, розв'язування задачі із допомогою викладача;
- **0.75** – добре знання теоретичного матеріалу, вміння його застосовувати і майже самостійне розв'язування задачі;
- **1** – досконале знання теоретичного матеріалу, самостійне розв'язування задачі.

## 4. Відповідь на екзамені

Максимальна кількість балів: **50 балів**. Кількість рейтингових екзаменаційних балів дорівнює величині відсотка (від максимального балу) виконання екзаменаційної роботи. При виконанні менше 60% (<30 балів) екзаменаційної роботи вона не зараховується і повинна бути написана повторно.

## 5. Заохочувальні бали

Максимальна кількість балів: **не більше 5 заохочувальних балів за семестр**. Викладач має право заохотити студента додатковою кількістю балів за розв'язання індивідуальних задач підвищеної складності або за публікацію тез доповідей (участь у науковій конференції) за тематикою навчальної дисципліни.

## Умови позитивної проміжної атестації

Для отримання результату “атестовано” з першої проміжної атестації (8 тиждень) студент повинен набрати не менше ніж 50% від запланованої кількості балів на період атестації №1. Для отримання результату “атестовано” з другої проміжної атестації (14 тиждень) студент повинен також набрати не менше ніж 50% від запланованої кількості балів. **У разі неможливості написання з поважних причин модульної контрольної роботи, здобувачу освіти надається можливість написати її протягом двох наступних тижнів. Перескладання контрольних заходів для позитивної підсумкової семестрової атестації з метою її підвищення не допускається.**

**Студент отримує допуск до екзамену**, якщо його рейтинговий бал за семестр складає **не менше 30 балів**, при цьому він має хоча б одну позитивну атестацію, написану МКР та виконану РГР не менше, ніж на 60%. **Якщо рейтинговий бал за семестр менше 30 балів**, то студент може написати допускову контрольну роботу (*допускова КР*). При успішному (не менше 60% правильно розв'язаних задач) її написанні рейтинг за семестр дорівнюватиме 30 балам.

## Таблиця відповідності рейтингової оцінки за університетською шкалою

$R = R_C + R_E$	Оцінка ECTS	Оцінка
95...100	A	Відмінно
85...94	B	Дуже добре
75...84	C	Добре
65...74	D	Задовільно
60...64	E	Достатньо
$R \leq 60$	Fx	Незадовільно
$R_C < 30$ або не виконані інші умови допуску до екзамену	F	Не допущено

### **13. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)**

У випадку дистанційної форми навчання організація освітнього процесу здійснюється з застосуванням електронної пошти, Telegram, відеоконференцій в Zoom та освітньої платформи Moodle (Google Classroom). У разі зміни військово-політичної обстановки РСО може бути змінено згідно наказу КПІ та рішення кафедри.

#### **Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):**

**Складено:** професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірності ФМФ, доктор фіз.-мат. наук, професор Михайлець Володимир Андрійович; доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірності ФМФ, кандидат фіз.-мат. наук, Маслюк Ганна Олексіївна

**Ухвалено** кафедрою МА та ТЙ (протокол № 12 від 19.06.2023 р.)

**Погоджено** Методичною комісією ФМФ (протокол № 10 від 27.06.2023 р.)